引文格式:马洪磊,柴洪洲,章瀚元,等.顾及轨道偏差特征的轨道精调算法[J].武汉大学学报(信息科学版),2025,50(4):699-705.DOI:10.13203/j.whugis20220551

Citation: MA Honglei, CHAI Hongzhou, ZHANG Hanyuan, et al. Track Fine Adjustment Algorithm Considering Track Deviation Characteristics[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2025, 50(4): 699-705. DOI: 10.13203/j.whugis20220551

顾及轨道偏差特征的轨道精调算法

马洪磊[1] 柴洪洲[1] 章瀚元[2] 王 敏[1]

1 信息工程大学地理空间信息学院,河南 郑州,450001

2 广西宁铁测绘科技有限公司,广西 南宁,530002

摘 要:为保障铁路运营安全,需定期进行轨道几何状态检测和精调,以保持轨道的高平顺性。传统的以设计线形为基准的轨道精调方法存在诸多缺点,其中,如何提高轨道精调的效率和质量已成为轨道运营维护关注的热点问题之一。因此,利用轨道偏差在局部的空间相关性和全局的多极值等特征,采用三次样条曲线拟合轨道偏差曲线的主要特征,并将拟合线形作为轨道精调的基准线,使轨道精调充分顾及了轨道偏差特征。拟合误差验证了采用三次样条曲线拟合函数模型的正确性和可行性。轨道精调实例表明,与传统方法相比,利用所提方法计算的某段无砟轨道和有砟轨道的调整量分别下降了40.6%和46.7%,且精调结果完全合限,证明该算法可显著提高轨道精调的质量和效率,具有实用价值。

关键词:轨道几何状态;三次样条曲线;多极值;轨道精调;轨道偏差

中图分类号:P258;TU196 **文献标识码**:A **收稿日期**:2022-12-21

DOI:10.13203/j.whugis20220551 **文章编号**:1671-8860(2025)04-0699-07

Track Fine Adjustment Algorithm Considering Track Deviation Characteristics

MA Honglei[1] *CHAI Hongzhou*[1] *ZHANG Hanyuan*[2] *WANG Min*[1]

1 Institute of Geospatial Information, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China

2 Guangxi Ningtie Surveying and Mapping Technology Co. Ltd, Nanning 530002, China

Abstract: **Objectives**: In order to ensure the safety of railway operation, it's necessary to regularly and accurately inspect and adjust the track to maintain track geometry. The function of track fine adjustment of railway is to eliminate track irregularities. The traditional track fine adjustment method of railway based on the design alignment has many shortcomings, of which, how to improve the efficiency and quality of track fine adjustment has become one of the hot issues of railway operation and maintenance. **Methods**: The dominating characteristics of track deviation curve are fitted by cubic spline curve which takes advantages of the local spatial correlation and the global multi-extremum characteristics of track deviation curve. Then, the fitting curve is served as the zero line of track fine adjustment, so that the spatial correlation of track deviation is fully considered. The correctness and feasibility of cubic spline curve fitting functional model are verified by fitting error analysis. **Results**: Two examples of track fine adjustment show that the total amount of track fine adjustment calculated by the proposed algorithm has decreased by 40.6% for a section of ballastless track and 46.7% for a section of ballasted track compared with the traditional method, and the adjustment result is completely qualified, demonstrating that the proposed algorithm is able to significantly improve the quality and efficiency of track adjustment, and is valuable in practice. **Conclusions**: Even if the track deviations show randomness globally, spatial correlation is still significant locally. In addition, restricted by the design alignment of railway, track deviations are limited, leading to a multi-extremum characteristic.

基金项目:国家自然科学基金(42074014)。

第一作者:马洪磊,博士生,讲师,研究方向为测量数据处理理论与方法。hleima@163.com

通信作者:柴洪洲,教授。chaihz1969@163.com

Therefore, considering track deviation characteristics are necessary in track fine adjustment. To this end, track fine adjustment algorithm considering track deviation characteristics is proposed, of which the outcomes are proved desirable. The proposed algorithm is worth popularizing in practice.

Key words: track geometry; cubic spline curve; multi-extremum; track fine adjustment; track deviation

铁路轨道是极其重要的轨道交通基础设施[1]。列车的高速、安全、平稳运行对轨道平顺性提出了极高的要求,轨道精调是以轨道平顺性检测数据为依据,通过调整轨道几何形位使轨道平顺性达到目标状态[2-4]。因此,轨道精调质量是影响轨道平顺性的直接和关键因素,在铁路运营维护中发挥着极其重要的作用[5-7]。

目前,铁路无砟轨道模拟调整量的计算仍普遍采用人工模拟调整的方法,该方法自动化程度低、效率低,一般需要反复多次调整才能达到轨道平顺性要求[3]。该方法效果因人而异,一般要求技术人员具备丰富的铁路轨道养护经验。高速铁路运营因运行速度快且用于运营维护的天窗时间短的特点,对轨道平顺性以及轨道精调效率提出了更高要求。因此,文献[8]针对如何快速计算轨道调整量的问题进行分析,提出采用10阶多项式拟合的轨道精调方法。该方法在一些铁路轨道精调中取得了较好的应用效果,但10阶多项式拟合显然不具有通用性,难以满足任意长度、任意轨道点密度的轨道精调。文献[9]将小波变换应用到铁路轨道精调中,在减少了人工干预的前提下使大部分调整量降低到±1 mm范围内。但该方法未顾及轨道局部偏差一致超限的情况,且仍未实现完全的自动化。文献[10]提出了基于L_1范数最优原则的双轨自动精调算法,该方法顾及了非基准轨平顺性指标约束,采用逐点移动的分段规划策略自动计算轨道调整量。但该方法存在计算效率低的问题,仍难以满足实际工程要求。文献[11]采用遗传算法处理轨道精调问题,基本实现了轨道调整量计算的完全自动化。但该方法容易陷入局部最优解,无法确保得到全局最优的轨道调整方案。文献[12]针对局部轨道调整量过大、计算效率低的问题,提出了一种适用于轨道精调的改进粒子群-遗传算法。该方法拥有更强的跳出局部最优解的能力,但该算法较复杂且仍无法完全避免局部最优解的问题。文献[13]针对既有铁路曲线调整问题,采用三次样条曲线拟合既有铁路曲线,通过拟合误差分析证明了三次样条曲线能够以足够精度拟合铁路曲线。在此基础上,文献[13]提出了基于三次样条曲线拟合的既有铁路曲线调整方法。该方法理论简单、易于实现,但未考虑轨道局部偏差一致超限的情况,且该文献未涉及样条节点的选取问题。

本文在分析现有轨道精调方法优缺点的基础上,提出了一种顾及轨道偏差特征的轨道精调(track fine adjustment considering track deviation characteristics,TFACTDC)算法。该方法以轨道偏差数据为基础,以全部轨道偏差极值点(波峰和波谷)作为样条节点,调整轨道偏差超限的样条节点的目标值,有效顾及了局部轨道偏差超限的情况。该方法不仅实现了轨道调整量计算的完全自动化,也极大程度地降低了轨道调整量,提高了轨道精调效率。

1 三次样条曲线拟合的基本原理

1.1 三次样条曲线

三次样条函数是由一阶导数和二阶导数连续的分段三次多项式组成的分段函数[15]。将区间$[a,b]$划分为若干子区间Δ:$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,则三次样条函数满足以下3条性质:(1)该函数在任意子区间内都是一个三次多项式;(2)该函数及其一阶导数、二阶导数在内节点上连续;(3)该函数通过全部的样条节点(包括边界节点和内节点)。

三次样条曲线是由三次样条函数绘制的曲线,具有连续性和极高的光滑性,在插值计算、曲线拟合中应用广泛[14-15]。研究表明,采用三次样条函数拟合曲线具有以下优点:

1)计算稳定性,即仅改变某一节点的函数值,则其变化对与其相隔j个子区间的影响以$\left(\sqrt{3}-2\right)^j$的速度衰减;

2)最佳逼近性,在相同区间划分条件下,在均方差意义下,满足Ⅰ型边界条件的三次样条函数较其他三次样条函数是最佳逼近;

3)一致收敛性,提高拟合精度只需要加密内节点,而无需提高样条函数的次数,从而避免了高次多项式拟合的龙格效应。

1.2 算法原理与实施过程

大量实践表明,轨道偏差(基准轨高程偏差或线路中心线横向偏差)存在显著的空间相关

性,这主要是由轨道的结构特性、施工方法等决定的。此外,以里程为坐标横轴、轨道偏差(左偏为正值,右偏为负值)为坐标纵轴的离散轨道偏差数据,可视为对随线路里程连续变化曲线的离散采样。不难理解,尽管在微观(小尺度)视角下轨道实际线形与设计线形间存在偏差,但在宏观(大尺度)视角下其与设计线形基本吻合。因此,轨道偏差曲线必然具有多极值性,将极值为正的极值点称为波峰,极值为负的极值点称为波谷,二者统称为轨道偏差极值点。

显然,若将轨道偏差极值点作为样条曲线的内节点进行三次样条曲线拟合,则拟合曲线将更好地反映轨道偏差曲线的主要特征。进而,以拟合曲线代替设计线形作为基准线进行轨道精调,将极大地降低轨道调整量。分析可知,若拟合曲线能够最佳逼近轨道偏差曲线,则将最大程度降低轨道调整量。因此,本文采用的三次样条曲线特指满足最佳逼近性质的固定边界条件的三次样条曲线。此外,根据三次样条曲线的一致收敛性,理论上还可通过增加内节点的密度提高三次样条曲线对轨道偏差曲线的逼近程度。然而,增加内节点的密度将使拟合曲线反映出轨道偏差曲线的细节特征,从而降低拟合曲线的曲率,使其无法满足轨道精调基准线的平顺性要求。因此,为了保证拟合曲线仅反映轨道偏差曲线的主要特征,过度加密内节点的措施不可行。

综上,在轨道精调中,应在内节点固定的条件下最优估计三次样条曲线参数。因此,本文在仅以轨道偏差绝对值超过一定阈值的极值点作为内节点的条件下,充分利用轨道偏差曲线在极值点处的一阶导数为0的特点,提出了一种顾及轨道偏差特征的轨道精调算法。具体过程如下:

1)采用数据平滑或滤波方法剔除轨道偏差数据中的粗差,在此基础上查找大于阈值ε_1的全部极值点,将其作为三次样条曲线的内节点。

2)判断内节点的轨道偏差的绝对值是否超过阈值ε_2,若超过阈值ε_2,则将其绝对值设为阈值ε_2,正负号保持不变。

3)将起始点和终止点作为边界节点,采用固定边界(Ⅰ类边界)条件,并顾及内节点的一阶导数等于0的条件,进行固定边界条件的三次样条曲线拟合。

4)以拟合的三次样条曲线为轨道精调的基准线,计算各轨道点的调整量。

需要指出的是,步骤1)中阈值ε_1的作用是控制内节点的密度,使拟合的三次样条曲线仅反映轨道偏差曲线的主要特征。阈值ε_1取值越小,则内节点的密度越大,拟合曲线将更多地保留轨道偏差曲线的细节特征;反之,则内节点的密度越小,拟合曲线将舍去更多的轨道偏差曲线的细节特征。由于拟合曲线是用于轨道精调的基准线,因此,不宜过度保留轨道偏差曲线的细节特征,即阈值ε_1的值应适中。实践中,可对阈值筛选的内节点(轨道偏差极值点)进行适当的人为调整,亦可直接采用人为选取内节点的方法。

步骤2)中阈值ε_2的作用是避免出现轨道精调后轨道绝对偏差仍超出相关规范要求的情况,一般将其设为略小于规范限差值。如高速铁路要求轨道绝对偏差不超过10 mm[16],可设阈值ε_2在8 mm左右。针对无轨道绝对偏差要求的普速铁路、城际轨道交通、地铁等,应设阈值ε_2为$+\infty$ mm,表示不限制轨道绝对偏差的大小。

1.3　固定边界条件的三次样条曲线拟合原理

TFACTDC算法的核心在于将轨道偏差曲线的极值点选为样条曲线的内节点,从而使拟合函数模型符合轨道偏差的结构特点。因此,其关键是以大于一定阈值的轨道偏差极值点作为三次样条曲线的内节点,并在固定边界条件的三次样条曲线拟合中顾及极值点(内节点)处一阶导数等于0的条件。由三次样条函数是由分段三次多项式组成的分段函数可知,任意区间内的函数$S_i(m)$均为三次多项式函数:

$$S_i(m)=a_i+b_im+c_im^2+d_im^3\ (i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

式中,i表示子区间编号;a_i、b_i、c_i和d_i表示子区间i内的三次多项式系数,是待估参数;m表示线路里程。显然,n个子区间有$4n$个待估参数。

根据三次样条函数在内节点上的函数值、一阶导数和二阶导数均连续,可得方程为:

$$\begin{cases} S_i(m_j)=S_{i+1}(m_j) \\ S_i'(m_j)=S_{i+1}'(m_j) \\ S_i''(m_j)=S_{i+1}''(m_j) \end{cases} \tag{2}$$

式中,j表示内节点编号;S'表示函数的一阶导数;S''表示函数的二阶导数。显然,由$n-1$个内节点可列$3n-3$个方程。

根据三次样条曲线通过全部样条节点可知,在$n+1$个样条节点上,其函数值均等于样条节点处的轨道偏差值,可表示为:

$$S_i(m_j)=d_j \tag{3}$$

式中,m_j为样条节点j的里程值;d_j为样条节点j的轨道偏差值。显然,由$n+1$个样条节点(包括$n-1$个内节点和2个边界节点)可开列$n+1$个方程。

根据固定边界条件,可通过设定边界节点的一阶导数值列条件方程为:

$$\begin{cases} S_1'(m_1)=d_1' \\ S_n'(m_{n+1})=d_{n+1}' \end{cases} \tag{4}$$

式中,$S_1'(m_1)$表示第一个子区间内的三次多项式函数在起始(首)边界节点处的一阶导数;$S_n'(m_{n+1})$表示第n个子区间内的三次多项式函数在终止(尾)边界节点处的一阶导数;d_1'和d_{n+1}'为人为设定的首尾边界节点处的一阶导数值。显然,首尾边界节点处的一阶导数值通常是未知的,因此,本文选取轨道偏差极值点作为首尾边界节点,此时$d_1'=d_{n+1}'=0$。

根据三次样条函数的3条性质和固定边界条件可开列$4n$个数学方程。显然,由$4n$个方程恰好可解出$4n$个待估参数。此时,三次样条曲线恰好通过全部样条节点。然而,由于测量误差不可避免,导致极值点的里程和轨道偏差也必然含有误差,故三次样条曲线恰好通过样条节点的情况不符合实际情况。为此,将条件方程式(3)改为观测方程或误差方程更加合理,误差方程为:

$$d_j+v_j=a_i+b_im_j+c_im_j^2+d_im_j^3 \tag{5}$$

式中,(m_j,d_j)为内节点j的轨道偏差数据(里程和偏差);v_j为模型残差。此外,各子区间包含了大量的轨道偏差数据,亦可按式(5)开列误差方程。因此,误差方程的个数等于轨道偏差数据的个数与内节点个数之和,设轨道偏差数据为k个,则误差方程个数为$k+n-1$个。

以上函数模型并未顾及极值条件,这导致拟合的三次样条曲线与设计线形的偏差最大值可能比实际轨道偏差的最大值更大。这将使得拟合曲线难以作为轨道精调的基准线。为确保拟合曲线具有足够的光滑性,以满足其作为轨道精调基准线的要求,在三次样条曲线拟合的函数模型中应顾及内节点的极值条件,列条件方程为:

$$S_i'(m_j)=0 \tag{6}$$

综上所述,固定边界条件的三次样条曲线拟合的函数模型包括条件方程和误差方程,是附有条件的参数平差模型。针对该模型,可以采用附有条件的参数平差方法予以解算[17-18],亦可将条件方程转化为误差方程并结合无限权法予以解算,基本原理及解算过程详见文献[17]。

2 拟合误差分析与轨道调整实验

2.1 拟合误差分析

为验证本文建立的三次样条曲线拟合函数模型的正确性和可行性,并检验该方法的拟合效果,设计了与轨道偏差曲线高度相似(满足连续性和多极值性)的周期函数$f_1(m)$和非周期函数$f_2(m)$进行计算实验分析。采用本文建立的三次样条曲线拟合函数模型分别进行曲线拟合,得到两函数曲线及相应的拟合残差曲线如图1所示,拟合残差统计结果如表1所示。

由图1和表1可知,周期函数曲线和非周期函数曲线的拟合残差均较小,远小于轨道偏差的测量精度(中误差约1~2 mm)。实验结果验证了本文建立的三次样条曲线拟合函数模型的正确性和可行性。

理论分析表明,周期函数$f_1(m)$和非周期函数$f_2(m)$的曲率变化(反映曲线弯曲程度)可通过改变函数系数予以调节。其中,决定两函数曲率变化的关键系数定义为a(无量纲),取值越大表示曲线的曲率变化越大。为进一步检验三次样条曲线拟合效果与曲线函数的曲线变化大小的关系,将周期函数$f_1(m)$和非周期函数$f_2(m)$的最大值取为6 mm、10 mm、14 mm、18 mm,并分别进行三次样条曲线拟合,所得最大拟合残差的变化情况如图2所示。

由图2可知,本文建立的三次样条曲线拟合函数模型的拟合残差的最大值随曲线的曲率变化大小发生变化,曲率变化越大,拟合残差越大。因此,在实际应用中,若轨道偏差曲线的曲率变化过大,应适当增加内节点数量,以保证拟合精度。

由于轨道偏差的测量精度一般约1~2 mm,且大量实践表明,高速无砟铁路的轨道偏差曲线的曲率变化一般很小(轨道偏差的绝对值通常不超过10 mm),因此,本文建立的三次样条曲线拟合的函数模型能够完全适用于高速铁路轨道精调。普速铁路轨道偏差曲线的曲率变化相对较大,在使用时应根据实际情况适当加密内节点数量。

2.2 实例验证

为检验TFACTDC算法在轨道精调中的实际效果,本文收集了国内某段长约10.9 km的无砟铁路和某段长约51.7 km的有砟铁路的轨道横向偏差数据。若采用以设计线形为基准的传统

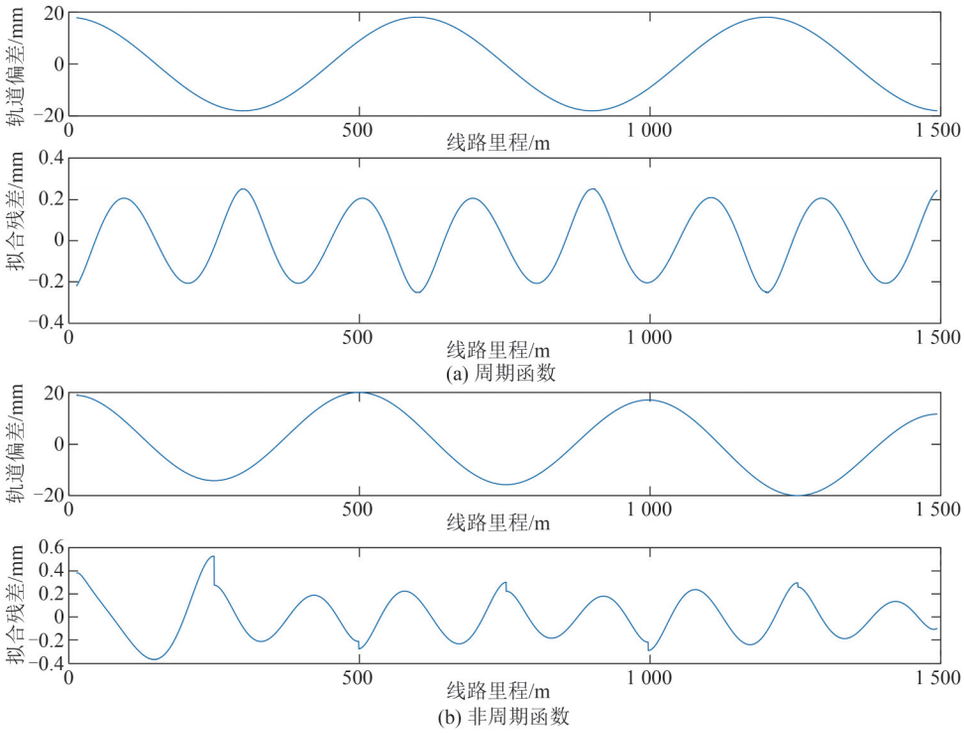


图 1　模拟的轨道偏差曲线及对应拟合残差曲线图

Fig. 1　Simulated Track Deviation Curves and Corresponding Fitting Residual Curves

表 1　模拟轨道偏差曲线的拟合残差统计/mm

Table 1　Statistics of Fitting Residuals of Two Simulated Track Deviation Curves/mm

函数	最大值	最小值	平均值	中位数
周期函数	0.25	−0.25	0.14	0.14
非周期函数	0.54	−0.38	0.16	0.16

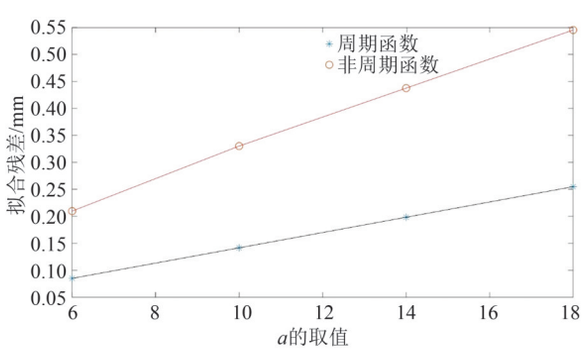


图 2　曲线拟合残差随系数 a 取值变化

Fig. 2　Variation of Curve Fitting Residual with Coefficient a

轨道精调方法,该区段在水平横向的轨道调整量统计结果如图 3 所示。采用本文方法进行轨道精调,所得水平横向的轨道调整量的统计结果如图 4 所示。传统精调方法与 TFACTDC 算法所得轨道调整量的统计对比如表 2 所示。

由图 3、4 和表 2 可知,TFACTDC 算法计算的轨道调整总量较传统精调方法显著减少,10.9 km 长的无砟轨道和 51.7 km 长的有砟轨道分别下降了 40.6% 和 46.7%。此外,轨道调整量的

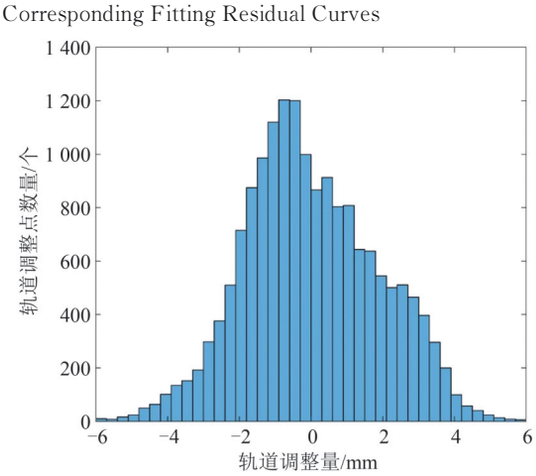


图 3　原始水平横向轨道调整量的直方图统计

Fig. 3　Histogram Statistics of Original Track Adjustment

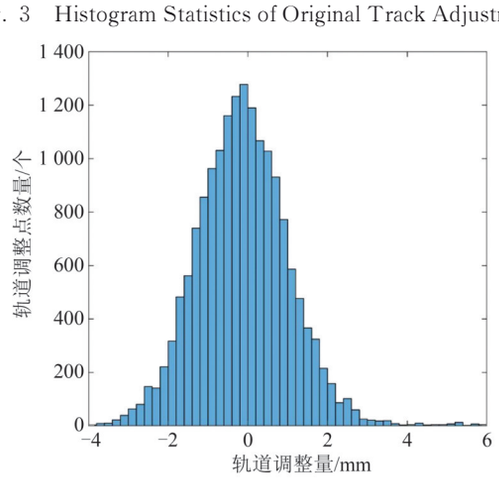


图 4　TFACTDC 算法的水平横向轨道调整量直方图统计

Fig. 4　Histogram Statistics of Horizontal Lateral Track Adjustment of TFACTDC Algorithm

表2 TFACTDC算法与传统方法的调整量统计表/mm

Table 2 Statistics of Adjustment Amount of TFACTDC Algorithm and Traditional Method/mm

实例	方法	总调整量	最大值	平均值	中位数	标准差
10.9 km无砟轨道	传统精调方法	25 638.35	5.99	1.52	1.30	1.10
	TFACTDC算法	15 227.02	6.00	0.90	0.75	0.72
51.7 km有砟轨道	传统精调方法	65 289.30	21.50	3.71	2.80	4.63
	TFACTDC算法	34 829.81	19.01	1.98	1.57	2.66

平均值和中位数也验证了TFACTDC算法计算的轨道调整量总体上更小。轨道调整量的标准差表明,TFACTDC算法计算的轨道调整量更加均匀。TFACTDC算法与传统精调方法在两个实例中的最大轨道调整量基本相当,无显著差异。

因此,本文提出的TFACTDC算法有效顾及了局部轨道系统性偏差的影响,计算的轨道调整量总体上显著降低,且调整量主要集中在较小的数值区间内,需要进行较大调整的轨道扣件的数量显著减少。在此基础上,本文进一步计算并统计了利用TFACTDC算法对该两段轨道调整前后的中、长波轨向不平顺指标(表3),TFACTDC算法使该段无砟轨道的30 m弦长轨向不平顺的最大值由调整前的4.644 mm减少为0.003 mm,300 m弦长轨向不平顺由7.166 mm减少为0.469 mm;使该段有砟轨道的30 m弦长轨向不平顺的最大值由调整前的7.750 mm减少为0.008 mm,300 m弦长轨向不平顺由20.694 mm减少为1.523 mm。因此,无论是无砟轨道还是有砟轨道,TFACTDC算法均能得到完全合限的精调结果。综上分析,TFACTDC算法能够显著提高轨道精调的质量和效率,具有实用价值。

表3 TFACTDC算法调整前后的轨向不平顺统计表

Table 3 Statistics of Track Irregularity Before and After Adjustment by TFACTDC Algorithm

轨道类型	轨向不平顺	最大值/mm	限值/mm	超限比例/%	备注
10.9 km无砟轨道	30 m弦	4.644	2	1.57	调整前
		0.003		0.00	调整后
	300 m弦	7.166	10	0.00	调整前
		0.469		0.00	调整后
51.7 km有砟轨道	30 m弦	7.750	2	0.30	调整前
		0.008		0.00	调整后
	300 m弦	20.694	10	0.51	调整前
		1.523		0.00	调整后

3 结 语

针对现有轨道精调方法的不足,本文提出了TFACTDC算法,将超过一定阈值的轨道偏差极值点作为三次样条曲线的内节点,通过依据三次样条曲线自身性质和内节点一阶导数为0的特点建立条件方程,并以轨道偏差数据为观测数据建立误差方程,构建了三次样条曲线拟合的函数模型,即附有条件的参数平差模型。在此基础上,采用附有条件的参数平差解算方法计算三次样条曲线参数的最优估值。TFACTDC算法可在高速铁路、普速铁路、地铁等轨道交通的铁路平顺性维护中推广使用。但是,在普速铁路、地铁等易出现较大轨道偏差的铁路轨道精调中,应注意根据轨道偏差曲线的曲率变化大小适当增加内节点数量,以更好顾及轨道偏差的系统性影响。

参 考 文 献

[1] 朱庆,王所智,丁雨淋,等. 铁路隧道钻爆法施工智能管理的安全质量进度知识图谱构建方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2022,47(8):1155-1164.
ZHU Qing, WANG Suozhi, DING Yulin, et al. A Method of Safety-Quality-Schedule Knowledge Graph for Intelligent Management of Drilling and Blasting Construction of Railway Tunnels[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2022, 47(8): 1155-1164.

[2] 王源,李帅,陈嵘,等. 基于逆滤波的轨道不平顺测评误差分析及滤波参数优化[J]. 铁道学报,2017, 39(10): 102-109.
WANG Yuan, LI Shuai, CHEN Rong, et al. Error Analysis of Track Irregularity Measuring and Filter Parameters Optimization Based on Inverse Filtering Method[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2017, 39(10): 102-109.

[3] 李阳腾龙. 高速铁路轨道精测精调及其平顺性优化研究[D]. 成都:西南交通大学.
LI Yangtenglong. Study on Track Precise Inspection and Adjustment as well as Its Regularity Optimization for High-Speed Railways [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2017.

[4] 马洪磊,刘成龙. 基于选权迭代法的既有铁路平面线形拟合方法[J]. 铁道科学与工程学报, 2016, 13(12): 2375-2380.

MA Honglei, LIU Chenglong. The Linear Fitting Method of Existing Railway Horizontal Alignment Based on Iteration Method with Variable Weights [J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2016, 13(12): 2375-2380.

[5] 周禹昆,陈起金,牛小骥. 基于A-INS组合导航的现代有轨电车轨道几何状态快速精密测量[J]. 铁道标准设计,2019,63(10): 66-71.
ZHOU Yukun, CHEN Qijin, NIU Xiaoji. Modern Tramway Track Geometric Quality Inspection Based on Aided INS[J]. *Railway Standard Design*, 2019, 63(10): 66-71.

[6] CHEN Q J, ZHANG Q, NIU X J, et al. Semi-analytical Assessment of the Relative Accuracy of the GNSS/INS in Railway Track Irregularity Measurements[J]. *Satellite Navigation*, 2021, 2(1): 25.

[7] 曾润国,贾庆鲁,白征东,等. 卫星定位与惯导组合高铁轨道平顺性测量系统[C]//卫星导航定位与北斗系统应用会议, 北京,2019.
ZENG Runguo, JIA Qinglu, BAI Zhengdong, et al. Satellite Positioning and Inertial Navigation Combined High Speed Rail Track Smoothness Measurement System [C]//Satellite Navigation and Positioning and BeiDou System Application Conference, Beijing, China, 2019.

[8] 聂松广,吴迪军,周凌焱. 无砟轨道基准轨模拟调整量自动计算方法研究[J]. 铁道科学与工程学报, 2016,13(7):1241-1246.
NIE Songguang, WU Dijun, ZHOU Lingyan. Automatically Calculating Method of Simulated Adjustment in the Benchmark Rail of Non-ballasted Track [J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2016,13(7):1241-1246.

[9] 赵龙,卢建康,刘竹均. 小波变换在高速铁路轨道精调中的应用[J]. 铁道工程学报,2017,34(4):30-35.
ZHAO Long, LU Jiankang, LIU Zhujun. Application of Wavelet Transform in Fine Adjustment of High-Speed Railway[J]. *Journal of Railway Engineering Society*, 2017, 34(4): 30-35.

[10] 李阳腾龙,岑敏仪. 高铁无砟轨道钢轨精调优化算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2018,43(6): 893-900.
LI Yangtenglong, Cen Minyi. A Novel Optimization Algorithm of Track Fine Adjustment for High-Speed Railways[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2018, 43(6): 893-900.

[11] 李济民. 基于遗传算法的轨道精调系统的设计与应用[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2012.
LI Jimin. Design and Application of Track Fine Adjustment System Based on Genetic Algorithm[D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2012.

[12] 刘家奇, 余朝刚, 朱文良. 基于改进PSO-GA算法的轨道精调优化研究[J]. 智能计算机与应用, 2021,11(12): 78-81.
LIU Jiaqi, YU Chaogang, ZHU Wenliang. Track Fine Adjustment Optimization Based on Improved PSO-GA Algorithm [J]. *Intelligent Computer and Applications*, 2021, 11(12): 78-81.

[13] 秦方方,易思蓉,杨长根. 基于三次样条曲线的铁路既有曲线整正方法[J]. 中国铁道科学, 2010, 31(2):18-23.
QIN Fangfang, YI Sirong, YANG Changgen. Method for the Realignment of the Existing Railway Curve Based on the Cubic Spline Curve[J]. *China Railway Science*, 2010, 31(2): 18-23.

[14] 沈云中, 陶本藻. 实用测量数据处理方法[M]. 北京: 测绘出版社, 2012.
SHEN Yunzhong, TAO Benzao. Practical Methods for Surveying Data Processing[M]. Beijing: Sino Maps Press, 2012.

[15] 张玲. 基于三次样条曲线拟合公路平面线形方法研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2007.
ZHANG Ling. Research on the Method of Fitting Highway Plane Alignment Based on Cubic Spline Curve[D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2007.

[16] 中华人民共和国铁道部. TB10601—2009高速铁路工程测量规范[S]. 北京:中国铁道出版社,2009.
Ministry of Railways of the People's Republic of China. TB 10601—2009 Code for Engineering Survey of High Speed Railway [S]. Beijing: China Railway Publishing House, 2009.

[17] 隋立芬, 宋力杰, 柴洪洲, 等. 误差理论与测量平差基础[M]. 北京: 测绘出版社, 2016.
SUI Lifen, SONG Lijie, CHAI Hongzhou, et al. Error Theory and Foundation of Surveying Adjustment[M]. Beijing: Sino Maps Press, 2016.

[18] 胡宇,姚宜斌,方兴,等. 论平差模型的关系与几何解 释[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2023, 48(8): 1366-1372.
HU Yu, YAO Yibin, FANG Xing, et al. Relationship and Geometric Interpretation of Adjustment Models [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2023, 48(8): 1366-1372.